Leçon 76 : Formules de Taylor. Applications.

Prérequis : Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis - Intégration, intégration par parties - Définition d'un développement limité.

1 Formule de Taylor-Young

1.1 Enoncé

Théorème 1.1. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et soit $c \in]a,b[$. Alors*
$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \ldots + \frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(c) + \frac{(x-c)^n}{n!}f^{(n)}(c) + o((x-c)^n)$

Démonstration. Par récurrence sur n, en utilisant le théorème des accroissements finis. □

Remarque. La formule de Taylor-Young fournit un résultat local sur la fonction f. On n'a besoin dans les hypothèses que de f dérivable n fois au voisinage de c.

1.2 Applications

1.2.1 Développements limités

Si f est n fois dérivable en a, alors elle admet un développement limité d'ordre n en a (donné par la formule précédente).

Exemple. $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$

Remarque. La réciproque est fausse.

Contre-exemple. Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

1.2.2 Zéros des fonctions $\mathcal{C}^\infty$

Théorème 1.2. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$, alors tout zéro d'ordre fini est isolé.*

Démonstration. a zéro d'ordre fini de f. La formule de Taylor-Young au voisinage de a nous donne : $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(a) + \frac{(x-a)^p}{p!}f^{(p)}(a) + \varepsilon(x)(x-a)^p = (x-a)^p(\frac{f^{(p)}(a)}{p!} + \varepsilon(x))$.
On choisit α tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[$, $|\varepsilon(x)| \leq |\frac{f^{(p)}(a)}{p!}|$.
On a alors $\frac{f^{(p)}(a)}{p!} + \varepsilon(x) \neq 0$, donc a est le seul zéro de f dans $]a-\alpha, a+\alpha[$. □

2 Formule de Taylor-Lagrange

2.1 Enoncé

Théorème 2.1. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et tel que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$.*
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

Démonstration. Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \ldots - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$.
A est choisi tel que $\varphi(a) = 0$.
φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ de dérivée $\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) + A\frac{(b-x)^n}{n!}$. D'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire $A = f^{(n+1)}(c)$. □

Remarques.

1. Si $n = 0$, c'est le théorème des accroissements finis.
2. La conclusion reste valable si $a > b$.
3. Contrairement à la formule de Taylor-Young, la formule de Taylor-Lagrange fournit un résultat sur le comportement global de la fonction.

Corollaire 2.2 (Formule de Maclaurin). $0 \in [a,b]$. *Alors $\forall x \in [a,b]$, $\exists \theta \in]0,1[$ tel que $f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$*

2.2 Applications

2.2.1 Encadrements

– $\forall x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
– $\forall x \geq 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

2.2.2 Calcul de limites

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2.$$

Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à $x \mapsto ln(1+x)$ sur $[0,1]$

2.2.3 Majoration de l'erreur lors d'une approximation d'une intégrale par des sommes de Riemann

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$, on cherche $\int_a^b f(t)dt$.
$[a,b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [a_i, a_i + h]$.

1. On approxime $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$ par $hf(a_i)$.
TL à l'ordre 1 nous donne : $\exists c_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $\int_{a_1}^{a_{i+1}} f(t)dt - hf(a_i) = f'(c_i)\frac{h^2}{2}$.
D'où $|\int_a^b f(t)dt - h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)| \leq \sup_{[a,b]} |f'|\frac{(b-a)^2}{2n}$
2. On approxime $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$ par $hf(a_i + \frac{h}{2})$.
TL à l'ordre 2 nous donne :
$|\int_a^b f(t)dt - h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih+\frac{h}{2})| \leq \sup_{[a,b]} |f''|\frac{(b-a)^3}{24n^2}$

3 Formule avec reste intégral

3.1 Enoncé

Théorème 3.1. *Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Alors*
$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$

Démonstration. Par récurrence sur n, avec intégration par parties. □

3.2 Applications

3.2.1 Irrationnalité de e

En effectuant un DTRI de $f : x \mapsto e^x$ sur $[0,1]$ à l'ordre n, on obtient un encadrement de e :
$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq e \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$
Cette inégalité est stricte (faire à l'ordre $n+1$ puis ramener à l'ordre n). Supposons e rationnel, càd $e = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. En multipliant les trois membres de l'inégalité par $n!$, on a $\forall n \geq 1$:

$$\underbrace{n! + \frac{n!}{1!} + \cdots + \frac{n!}{n!}}_{u_n} < n!\frac{p}{q} < \underbrace{n! + \frac{n!}{1!} + \cdots + \frac{n!}{n!}}_{u_n} + \frac{n!}{n!}$$

Or u_n est un entier et $n!\frac{p}{q}$ est un entier à partir d'un certain rang, d'où $u_n < n!\frac{p}{q} < u_n + 1$. Contradiction.

3.2.2 Equation différentielle

Soit f continue. On cherche à résoudre $y^{(n)} = f$ avec $\forall 0 \leq i \leq n-1$, $y^{(i)} = 0$.
En appliquant TLRI :
$y(x) = y(0) + xy'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n)}(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$. Cela revient à calculer une primitive.