Leçon 81 : Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

Prérequis : Définition d'une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ - Continuité et dérivabilité d'une fonction réelle - Théorème de la limite monotone - Lien entre monotonie d'une fonction dérivable et signe de la dérivée.

Cadre : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère cartésien du plan.

1 Fonctions convexes : définitions et généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1. L'application f est dite convexe sur I, si l'ensemble des points (x, y) de $I \times \mathbb{R}$ tels que $f(x) \leq y$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.
Cet ensemble est appelé épigraphe de f, noté épi(f).

Remarque. épi(f) est représenté graphiquement par la partie du plan située au dessus, au sens large, de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Définition 1.2. L'application f est dite concave sur I si et seulement si $(-f)$ est convexe sur I.

1.2 Caractérisations

Théorème 1.3. *L'application f est convexe sur I si et seulement si pour tout $(x, x') \in I^2$ et tout $\alpha \in [0, 1]$, on a*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)x') \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x')$$

Remarque. Toute fonction affine est à la fois convexe et concave sur $\mathbb{R}$, et ce sont les seules.

Théorème 1.4. *Soit $n \geq 2$, f est convexe sur I si et seulement si $\forall(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et $\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, on a :*

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

.

1.3 Interprétation géométrique

Théorème 1.5. *f est convexe sur I si et seulement si $\forall(a, b) \in i^2$, $a \neq b$, $A(a, f(a))$, $B(b, f(b)$, l'arc du graphe de f d'extrémité A et B est en-dessous, au sens large, de la corde $[A, B]$.*

1.4 Exemples et contres exemples

2 Fonctions convexes : Propriétés

Proposition 2.1. *f est convexe sur I si et seulement si $\forall(u, v, w) \in I^3$, $u < v < w$, on a*

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}$$

Reprensation graphique et traduction en pente.

Proposition 2.2. *f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, l'application ρ_a définie de $I \smallsetminus \{a\}$ dans $\mathbb{R}$ par $\rho_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \smallsetminus \{a\}$.*

Proposition 2.3. *Si f est convexe sur I alors*
f admet des dérivées à droite et à gauche en tout point a de l'interieur de I et ${f_g}'(a) \leq {f_d}'(a)$.
f est continue sur l'interieur de I.

Exercice. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\frac{x+x'}{2}) \leq \frac{f(x)+f(x')}{2}$, alors f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exemple. la fonction $x \longrightarrow \exp x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.4. *Soit f une fonction dérivable sur I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.*

Corollaire 2.5. *Soit f une fonction dérivable sur I. Alors f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, pour tout $x \in i$, on a*

$$f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$$

.

Remarque. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f est située au-dessus de toutes ses tangentes.

Corollaire 2.6. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur I un intervalle ouvert. Alors f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I.*

2.1 Problème de Minimum

Théorème 2.7. *Si f est convexe sur I et admet un minimum local, alors c'est un minimum global.*

2.2 Opérations sur les fonctions convexes

Proposition 2.8.
Si α et β sont des réels > 0 et f, g des fonctions convexes sur I alors $\alpha f + \beta g$ est une fonction convexe sur I.
Si $f : I \longrightarrow J$ est convexe sur I et $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction srictement croissante sur J alors $h \circ f$ est convexe sur I.
En particulier si $f > 0$ et $\ln f$ est convexe, alors f est convexe.

Remarque. Le produit de deux fonctions convexes n'est pas en général une fonction convexe.

Contre-exemple. $x \longrightarrow x^2 \exp x$ n'est pas une fonction convexe.

Exemples.

3 Applications

3.1 Moyennes arithmétique et géométrique

$$\forall(a_1, \ldots, a_n) \in I^n, \qquad \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

3.2 Inégalité de Young :

Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$ alors pour tous $x, y > 0$, on a

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$$

3.3 Inégalité de Hölder :

Soit $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^{n} {a_i}^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} {b_i}^q)^{\frac{1}{q}}$$

3.4 Equation différentielle :

Soit l'équation différentielle $y'' + p(x)y = 0$ (1) avec p une fonction continue et négative.
Montrer que ce problème a une solution unique tq $y(\alpha) = A$ et $y(\beta) = B$ avec $\alpha \neq \beta$. Pour cela montrer que :
Si u est une solution non nulle de (1) alors u admet au plus un zéro.
$\phi : \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tq $\phi(u) = (u(\alpha), u(\beta))$ est bijective où $\mathcal{S}_1$ est l'ensemble des solution de (1).

3.5 Inégalité de Jensen :

Soit g une fonction continue et srictement positive sur I et $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, alors on a

$$\psi(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t) \leq \int_0^1 \psi(g(t))\,\mathrm{d}t$$

On appliquer ce résultat à la fonction $\psi : x \longrightarrow x \ln x$.